

ANALYSE SPECTRALE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES ANALOGIQUES - EFFET DES FILTRES

Sommaire

I	Signaux périodiques : décomposition en série de Fourier (SF)	3
I.1	Préliminaire : valeurs moyenne et efficace d'un signal	3
I.2	Analyse de Fourier	4
	a - Théorème de Fourier	4
	b - Relations entre coefficients de Fourier	5
	c - Forme complexe : coefficients c_n	6
	d - En cosinus et sinus : a_n et b_n	6
	e - En cosinus : coefficients d_n	7
	f - Propriétés importantes de symétrie des signaux - conséquences	8
I.3	Exemples classiques (à connaître)	9
	a - Signal crêteau $f(t)$ (impair ici)	9
	b - Signal triangle pair $F(t)$	10
	c - Signal impulsionnel de rapport cyclique a (utile!!!)	11
I.4	Spectre d'un signal périodique	11
	a - Définition	11
	b - Synthèse de Fourier (opération réciproque de la SF)	13
	c - Retour sur la valeur efficace	15
II	Signaux quelconques : introduction à la transformée de Fourier (TF) (hors programme)	16
II.1	Limite de la série de Fourier (SF) : la transformée de Fourier (TF)	16
II.2	Exemple classique : fonction porte - relation temps fréquence	18
III	Effets des filtres linéaires sur les signaux périodiques	18
III.1	Cas d'un signal sinusoïdal pur : fonction de transfert complexe (harmonique) en sortie ouverte (FTSO) - caractérisation des filtres	18

	a - Expression	18
	b - Principales relations utiles : rappels	20
	c - Réponse en gain - réponse en phase d'un filtre : diagramme de Bode	21
	d - Bande passante	21
III.2	Cas d'un signal périodique quelconque : de l'utilité de la linéarité	21
	a - Action d'un système linéaire sur un signal périodique	21
	b - Filtrage de composantes	22
	c - Rôle des harmoniques de haut rang	26
III.3	Caractère intégrateur des filtres	26
	a - Conditions d'intégration	26
	b - Filtres intégrateurs	27
	c - Exemple : recherche des conditions d'intégration	28
III.4	Caractère dérivateur des filtres	29
	a - Conditions de dérivation	29
	b - Filtres dérivateurs	29
	c - Cas particulier du filtre passe-bande : problème de l'acuité du filtre	30
IV	Petite approche des circuits non linéaires	31
IV.1	Un exemple classique : le multiplieur	31
IV.2	Exemples d'applications :	32

I Signaux périodiques : décomposition en série de Fourier (SF)

I.1 Préliminaire : valeurs moyenne et efficace d'un signal

■ VALEUR MOYENNE D'UN SIGNAL :

La valeur moyenne $\langle f \rangle$ d'un signal temporel $f(t)$ sur un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est définie par l'expression suivante :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot dt$$

S'agissant d'un signal périodique, l'intervalle de temps employé dans le calcul de la valeur moyenne est naturellement la période T du signal, soit :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot dt \quad \forall t_0$$

Le résultat étant indépendant de t_0 , on le note finalement

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (\text{I.1})$$

■ VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE :

DÉFINITION - (I.1) - 1:

Par définition, la valeur efficace d'un signal périodique correspond à la valeur qu'il faudrait donner à un signal continu pour dissiper dans une résistance la même énergie durant le même intervalle de temps qu'avec le signal périodique.

Si f_{eff} désigne la valeur efficace d'un signal périodique $f(t)$, alors la définition de f_{eff} se traduit formellement par :

$$E = \mathcal{P} \times T = \frac{f_{eff}^2}{R} \times T = \int_0^T P(t) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{f(t)^2}{R} \cdot dt$$

soit finalement :

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T f^2(t) \cdot dt} \quad (\text{I.2})$$

REMARQUE - (I.1) - 1:

Dans le cas particulier d'un signal sinusoïdal pur d'amplitude f_0 , la valeur efficace est :

$$f_{eff}(\sim) = \sqrt{\frac{f_0^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) \cdot dt} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

Exercice de cours: (I.1) - n° 1 Déterminer la valeur efficace d'un signal périodique triangulaire d'amplitude v_0 .

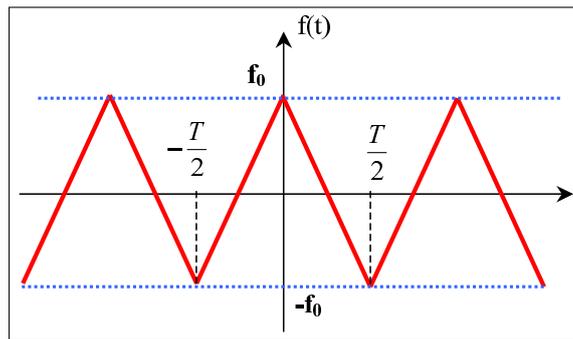


FIGURE I.1 – Signal triangulaire de période T

RÉPONSE : Le signal est défini par intervalle comme suit :

$$\begin{cases} f(t) = +f_0 \left(1 + \frac{4t}{T}\right) \forall t \in \left[-\frac{T}{2}; 0\right] \\ f(t) = +f_0 \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \forall t \in \left[0; \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

Le carré de f_{eff} s'écrit :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)^2 \cdot dt = 2 \frac{f_0^2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 - \frac{4t}{T}\right)^2 \cdot dt$$

qui donne après calcul élémentaire :

$$f_{eff} = \frac{f_0}{\sqrt{3}}$$

I.2 Analyse de Fourier

a - Théorème de Fourier

On montre dans le cadre du cours de mathématiques, que toute fonction périodique $f(t)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ peut, sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité, s'écrire comme la superposition de fonctions har-

moniques appelée série de Fourier :

1ère forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (I.3)$$

$$= a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

2nde forme : on peut également écrire la décomposition de Fourier de $f(t)$ sous la forme suivante :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [d_n \cos(n\omega t + \varphi_n)] \quad \text{avec } d_n \geq 0 \quad (I.4)$$

$$= a_0 + d_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + d_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots$$

3ième forme : sous la forme complexe suivante (la fonction $f(t)$ peut être complexe ou non) :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jn\omega t} \quad (I.5)$$

Vocabulaire :

- La valeur moyenne a_0 est appelée **composante continue** du signal.
- Les coefficients a_n et b_n , d_n ou c_n sont appelés **coefficients de Fourier** de la fonction f .
- Le coefficient d_n est appelé **amplitude de l'harmonique d'ordre n**.
- Les termes de pulsation ω sont appelés **composantes fondamentales du signal**.
- Les termes de pulsation $n\omega$ avec $n \geq 2$ sont appelés **composantes harmoniques du signal**.

A RETENIR : L'analyse de Fourier d'un signal consiste à déterminer les jeux de coefficients (a_0, a_n, b_n) ou (d_n, φ_n) ou c_n . On se propose ici, connaissant la fonction $f(t)$, d'établir les relations permettant leur calcul.

b - Relations entre coefficients de Fourier

Exercice de cours: (I.2) - n° 2 On considère un signal périodique sans parité particulière. Montrer que d_n , amplitude de l'harmonique d'ordre n , et le déphasage φ_n de cette harmonique sont donnés par : $d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$.

Exercice de cours: (I.2) - n° 3 Etablir de même le lien entre c_n et a_n et b_n en montrant que :

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = \underline{c_n} + \underline{c_{-n}} \\ b_n = j(\underline{c_n} - \underline{c_{-n}}) \end{cases} \quad \text{avec } n > 0$$

c - Forme complexe : coefficients c_n

La SF du signal est

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega t}$$

en multipliant par $e^{-jp\omega t}$ et en intégrant entre $-T/2$ et $+T/2$, il vient :

$$\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jp\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n \int_{-T/2}^{+T/2} e^{j(n-p)\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n \underbrace{\int_{-T/2}^{+T/2} [\cos((n-p)\omega t) + j \sin((n-p)\omega t)] dt}_{=K_p}$$

donc :

$$\begin{cases} K_{p \neq n} = 0 \\ K_{p=n} = T \end{cases}$$

ainsi :

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt \quad (\text{I.6})$$

En particulier :

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt = \langle f(t) \rangle \quad (\text{I.7})$$

d - En cosinus et sinus : a_n et b_n

Soit la fonction périodique $f(t)$ décomposable en série de Fourier :

■ CAS DE a_0 :

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt = \langle f(t) \rangle \quad (\text{I.8})$$

■ CAS DE a_n :

$$a_n = \underline{c}_n + \underline{c}_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (e^{-jn\omega t} + e^{jn\omega t}) \cdot dt$$

soit :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad (\text{I.9})$$

■ CAS DE b_n :

$$b_n = j(\underline{c}_n - \underline{c}_{-n}) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) j (e^{-jn\omega t} - e^{jn\omega t}) \cdot dt$$

soit :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \quad (\text{I.10})$$

e - En cosinus : coefficients d_n

On a :

$$\begin{cases} a_n = d_n \cos \varphi_n \Rightarrow \underline{c}_n + \underline{c}_{-n} = d_n \cos \varphi_n \quad (L_1) \\ b_n = -d_n \sin \varphi_n \Rightarrow j(\underline{c}_n - \underline{c}_{-n}) = -d_n \sin \varphi_n \quad (L_2) \end{cases}$$

En formant $(L_1) - j(L_2)$ il vient :

$$2\underline{c}_n = d_n e^{j\varphi_n} = \underline{d}_n$$

soit finalement

$$\underline{d}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} \cdot dt \quad (\text{I.11})$$

avec :

$$d_n = |\underline{d}_n| = |2\underline{c}_n| \quad \text{et} \quad \varphi_n = \arg(\underline{d}_n) = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (\text{I.12})$$

NB : d_n représente l'amplitude de l'harmonique de rang n

f - Propriétés importantes de symétrie des signaux - conséquences

PROPRIÉTÉ - (I.2) - 1:

Si $f(t)$ est une fonction paire, alors :

$$f(t) = f(-t) \stackrel{\forall t}{\Leftrightarrow} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) - b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

On en déduit que :

$$b_n = 0 \quad \forall n$$

PROPRIÉTÉ - (I.2) - 2:

Si $f(t)$ est une fonction impaire, on déduit par démarche analogue que :

$$a_n = 0 \quad \forall n$$

en particulier $a_0 = 0$ (pas de composante continue)

PROPRIÉTÉ - (I.2) - 3:

Si $f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$ alors :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t + n\pi) + b_n \sin(n\omega t + n\pi) = -a_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

soit :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n \cos(n\omega t + n\pi) = -a_n \cos(n\omega t) \\ b_n \sin(n\omega t + n\pi) = -b_n \sin(n\omega t) \end{cases} \rightarrow a_{2p} = b_{2p} = 0 \quad p \in \mathbb{N}$$

Conclusion : la SF de $f(t)$ ne comporte que des harmoniques de rangs impairs. (exemple : créneau quelconque)

PROPRIÉTÉ - (I.2) - 4:

Si $\tilde{f}(t) = f(t) - \langle f(t) \rangle = f - a_0$ est impair alors :

$$a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

REMARQUE - (I.2) - 2:

MESURE À L'OSCILLOSCOPE DE LA COMPOSANTE CONTINUE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

- En couplage DC (Direct Coupling : tracé du signal complet i.e. avec composante continue.
- En couplage AC : tracé du signal privé de sa composante continue (très forte capacité ajoutée en série : explication en "live")

⇒ la différence d'amplitude entre les deux tracés (à tout instant) est égale à la composante continue du signal.

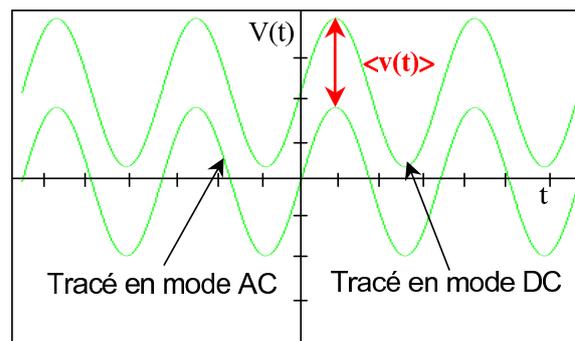


FIGURE I.2 – Mesure de la composante continue d'un signal (valeur moyenne) à l'oscilloscope

I.3 Exemples classiques (à connaître)

a - Signal créneau $f(t)$ (impair ici)

Prenons l'exemple d'un signal créneaux impair :

La parité de ce signal entraîne la nullité des coefficients a_n ; ainsi :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overbrace{f(t) \cdot \sin(n\omega t)}^{\text{pair}} dt$$

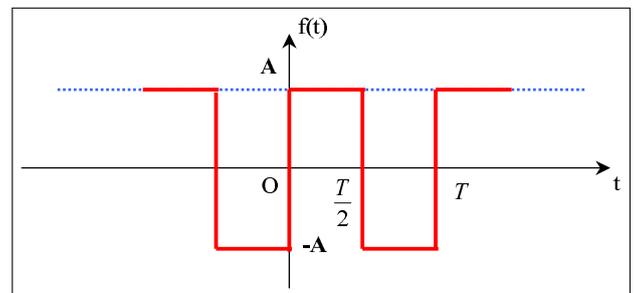


FIGURE I.3 – Signal créneau impair de période T

$$= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin(n\omega t) \cdot dt = \frac{4A}{n2\pi} [-\cos(n\omega t)]_0^{T/2}$$

$$= \frac{2A}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$$

que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{b_n = \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n}} \Rightarrow \frac{2A}{\pi} \times \begin{cases} 2 & (n = 1) \\ 0 & (n = 2) \\ \frac{2}{3} & (n = 3) \\ 0 & (n = 4) \\ \frac{2}{5} & (n = 5) \\ \dots & \end{cases}$$

On constate effectivement que seuls les coefficients d'indices impairs sont non nuls (propriétés $f(t) = -f(t + T/2)$).

Ainsi, en faisant le changement d'indice $n = 2k + 1$, on écrit plus synthétiquement :

$$\boxed{b_{2k+1} = \frac{4A}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1}} \text{ avec } k = 1, 2, 3 \dots \Rightarrow \frac{4A}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{1} & (k = 0) \\ \frac{1}{3} & (k = 1) \\ \frac{1}{5} & (k = 2) \\ \dots & \end{cases}$$

et donc :

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4A}{(2k+1)\pi} \sin[(2k+1)\omega t]}$$

b - Signal triangle pair $F(t)$

(On a : $\text{pente} = \frac{2B}{T/2} = \frac{4B}{T} = A$)

On peut remarquer que $F(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt + F(0)$, soit :

$$F(t) = \int_0^t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4A}{\pi(2k+1)} \sin[(2k+1)\omega t'] \right] \cdot dt' + \underbrace{cste}_{= 0 \text{ pas de comp. cont.}}$$

$$= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4AT}{2\pi^2(2k+1)^2} \cos[(2k+1)\omega t]$$

soit :

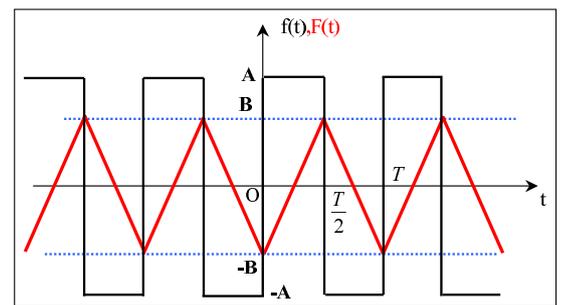


FIGURE 1.4 – Signal triangle pair $F(t)$ de période T

$$F(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8B}{\pi^2(2k+1)^2} \cos[(2k+1)\omega t]$$

c - Signal impulsionnel de rapport cyclique a (utile!!!)

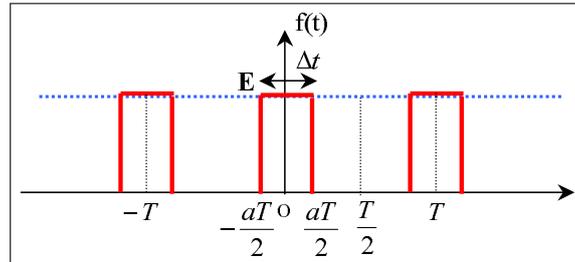


FIGURE I.5 – Signal impulsionnel périodique de rapport cyclique a

NB : rapport cyclique $a = \frac{\Delta t}{T}$

Composante continue = valeur moyenne : $a_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) \cdot dt = \frac{\Delta t}{T} E = aE$

Calcul du coefficient de Fourier complexe \underline{c}_n :

$$\begin{aligned} \underline{c}_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\omega t} \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{-aT/2}^{+aT/2} E e^{-jn\omega t} \cdot dt \\ &= Ea \left[\frac{e^{-jna\pi} - e^{-jna\pi}}{-2jna\pi} \right] \end{aligned}$$

soit :

$$\underline{c}_n = Ea \cdot \text{sinc}(na\pi)$$

et donc :

$$a_n = \underline{c}_n + \underline{c}_{-n} = 2Ea \cdot \text{sinc}(na\pi)$$

I.4 Spectre d'un signal périodique

a - Définition

On rappelle que l'harmonique de rang n peut s'écrire selon les deux premières formes de la SF :

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = d_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \text{ avec } d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

DÉFINITION - (I.4) - 2:

On appelle spectre du signal, la représentation graphique de $d_n = f(\omega)$

Exemples :

■ Signal créneau impair :

$$d_{2k+1} = \sqrt{a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2} = |b_{2k+1}| = \frac{4A}{(2k+1)\pi} \quad (k \in \mathbb{N})$$

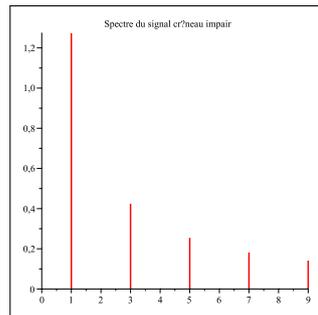


FIGURE I.6 – Spectre d'amplitude du signal créneau impair ($\omega_n = (2k+1)\omega$ $k \in \mathbb{N}$)

■ Signal triangle pair : $d_{2k+1} = \sqrt{a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2} = |a_{2k+1}| = \frac{8B}{(2k+1)^2\pi^2} \quad (k \in \mathbb{N})$

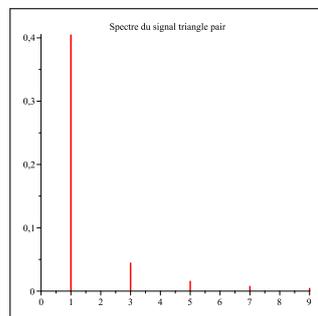


FIGURE I.7 – Spectre d'amplitude du signal triangle pair

Du fait de la dépendance en $\frac{1}{(2k+1)^2}$ de l'amplitude spectrale, les harmoniques sont très rapidement atténuées, bien plus rapidement que dans le cas du créneau.

■ TRAIN IMPULSION vers PEIGNE de DIRAC

$$d_n = |a_n| = |2c_n| = 2Ea \cdot |\text{sinc}(na\pi)|$$

NB : si $a \rightarrow 0$, le signal est appelé "Peigne de Dirac" (succession de "pics" de Dirac) pour lequel on impose la contrainte $E\Delta t = 1$, et que l'on note :

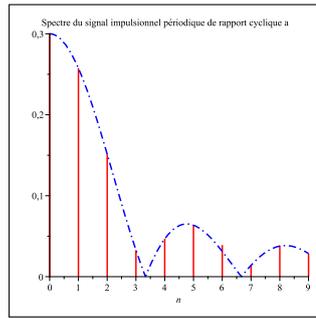


FIGURE I.8 – Spectre du signal impulsionnel périodique de rapport cyclique a

$$f(t) = E \cdot \delta(t - nT) = \begin{cases} E & \text{si } t = nT \\ 0 & \text{si } t \neq nT \end{cases}$$

et son spectre est également un "Peigne de Dirac" fréquentiel :

$$\begin{cases} d_0 = |c_0| \xrightarrow{|sinc(na\pi)| \rightarrow 1 \forall n} E a = E \frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{T} \\ d_{n>1} = |2c_n| \xrightarrow{|sinc(na\pi)| \rightarrow 1 \forall n} 2E \frac{\Delta t}{T} = \frac{2}{T} \end{cases}$$

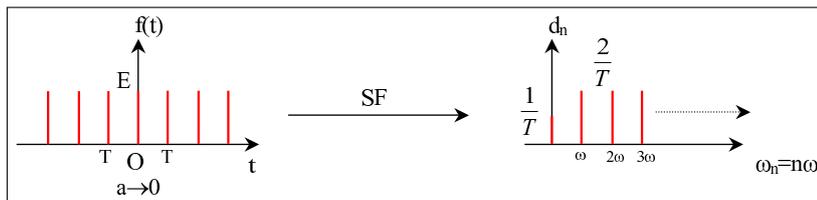


FIGURE I.9 – Allure et spectre d'un Peigne de Dirac ($a \rightarrow 0$)

NB : on représente parfois le spectre en traçant simplement $|c_n| = f(\omega)$.

REMARQUE - (I.4) - 3:

Le spectre d'un signal périodique est toujours discret et d'étendue infinie.

b - Synthèse de Fourier (opération réciproque de la SF)

Si la décomposition de Fourier consiste en la recherche des amplitudes d'harmoniques (et leurs phases respectives), la synthèse de Fourier est l'opération réciproque qui consiste à reconstituer **partiellement** le signal initial en réalisant la somme d'un nombre fatalement fini d'harmoniques :

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t) = f(t)$$

EXEMPLE : On rappelle la série de Fourier du signal créneau impair :

$$f_N(t) = 4 \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{\sin [(2k + 1)\omega t]}{2k + 1}$$

Les tracés ci-dessous correspondent aux sommes partielles $f_N(t)$ de la série de Fourier de la fonction créneau, limitées à la somme des N premières harmoniques non nulles.

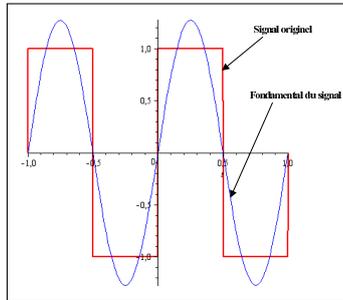


FIGURE I.10 – Reconstruction du signal à partir du fondamental

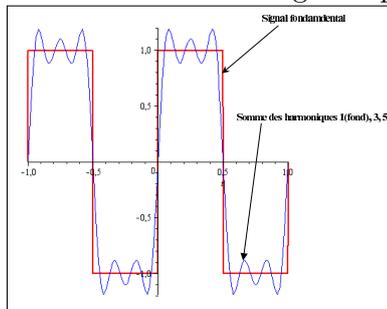


FIGURE I.11 – Reconstruction du signal à partir des 3 premiers harmoniques non nuls (N=2 donc k=0,1,2)

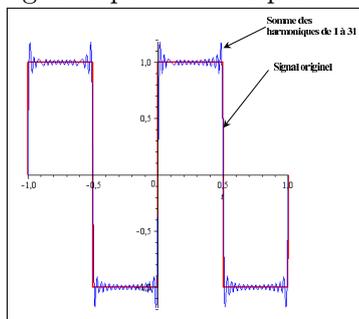


FIGURE I.12 – Reconstruction du signal à partir des 15 premiers harmoniques non nuls (N=15 donc k=0,1...15)

c - Retour sur la valeur efficace

Soit un signal périodique $f(t)$ de décomposition de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Le carré de la valeur efficace de $f(t)$ est par définition :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_{(T)} f^2(t) \cdot dt = \langle f^2(t) \rangle$$

L'intégrant une fois développé comprend les termes suivants :

$$f^2(t) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \cdot \cos^2(n\omega t + \varphi_n) + 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\omega t + \varphi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{\infty} d_n \cdot d_p \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n) \cdot \cos(p\omega t + \varphi_p)$$

On vérifie sans trop de calcul que :

- La valeur moyenne du premier terme qui est constant est égale à lui même, soit a_0^2 .
- La valeur moyenne du second terme vaut

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

- La valeur moyenne sur une période du troisième terme est nulle puisqu'il s'agit d'un signal sinusoïdal pur.
- Enfin, la valeur moyenne du 4^{ième} terme est nulle car la valeur moyenne du produit de deux fonctions sinusoïdales de fréquence différente est nulle.

On dégage ainsi le **théorème de Parseval**, soit :

PROPRIÉTÉ - (I.4) - 5:

$$f_{eff}^2 = a_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2}_{\text{carré val. eff. harm. rang } n} = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \quad (\text{relation de Parseval}) \quad (I.13)$$

NB : $\frac{1}{2}d_n^2$ est simplement la valeur efficace de l'harmonique de rang n

Conséquence : Traduction en terme de puissance

la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans une résistance par un courant périodique quelconque est égale à la somme des puissances moyennes dissipées par sa composante continue, son terme fondamental et chacune de ses harmoniques.

Autre formulation :

Le carré de la valeur efficace d'un courant périodique quelconque est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces des toutes les composantes de son développement en série de Fourier.

CONCLUSION : linéarité pour la puissance, plutôt « inhabituel » dans la mesure où c'est une grandeur quadratique!!!

II Signaux quelconques : introduction à la transformée de Fourier (TF) (hors programme)

II.1 Limite de la série de Fourier (SF) : la transformée de Fourier (TF)

On considère un signal $f(t)$ non nécessairement périodique, et on définit une fonction $f_T(t)$ périodique de période T coïncidant avec $f(t)$ sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}; +\frac{T}{2}]$; $f_T(t)$ est appelée **périodisée** de $f(t)$:

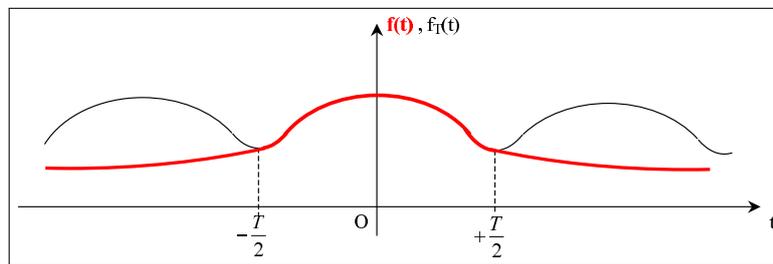


FIGURE I.13 – Fonctions $f(t)$ et $f_T(t)$

$f_T(t)$ peut être développée en série de Fourier avec pour la forme complexe :

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

Lorsque $T \rightarrow \infty$ alors $f_T(t)$ se confond avec $f(t)$. Les expressions précédentes peuvent alors être réécrites :

Notons tout d'abord que $\omega_{n+1} - \omega_n = (n+1)\frac{2\pi}{T} - n\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}$, soit $\underbrace{\frac{1}{T}}_{\rightarrow \infty} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi} \rightarrow \overbrace{\frac{d\omega}{2\pi}}^{\text{infin. petit !}}$

L'écart fréquentiel entre les harmoniques est donc maintenant un infiniment petit d'ordre 1, soit $d\omega$; ainsi la pulsation à considérer n'est plus celle d'une harmonique de rang n ($n\omega$), mais la valeur ω **varie maintenant de manière continue**.

On peut ainsi transformer l'écriture du coefficient de développement c_n qui devient :

$$\begin{aligned} \underline{c}_n &= \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-T/2 \rightarrow -\infty}^{T/2 \rightarrow +\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{\text{réorg.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-T/2 \rightarrow -\infty}^{T/2 \rightarrow +\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]}_{=\hat{f}(\omega)} \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(\omega) \cdot d\omega \end{aligned}$$

Ainsi, le développement de $f_T(t)$ en SF s'écrit finalement comme une intégrale lorsque $T \rightarrow \infty$:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega t} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega}$$

Bilan :

DÉFINITION - (II.1) - 3:

- $\hat{f}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $f(t)$ appelée aussi son **spectre** avec :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (\text{"spectre à partir du signal"}) \quad (\text{I.14})$$

- La "décomposition" de la fonction s'écrit alors :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega \quad (\text{"signal à partir du spectre"}) \quad (\text{I.15})$$

qui constitue la transformée de Fourier inverse de $\hat{f}(\omega)$.

REMARQUE - (II.1) - 4:

■ $\hat{f}(\omega)$ est donc l'amplitude de la composante de fréquence ω , c'est donc la fonction spectrale de $f(t)$ avec $\omega \in]-\infty; +\infty[$.

■ Pour le signal $f(t)$ non périodique, le spectre est continu.

II.2 Exemple classique : fonction porte - relation temps fréquence

On considère le signal "porte" défini comme suit :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{A}{\tau} & |t| < \frac{\tau}{2} \\ f(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La transformée de Fourier donne :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{A}{\tau} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

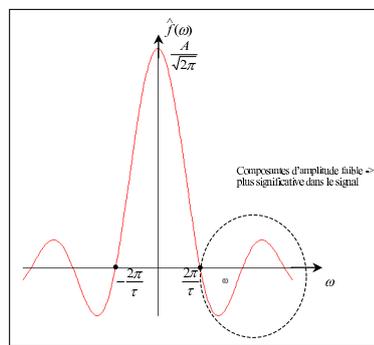


FIGURE I.14 – Transformée de Fourier de la fonction "porte"

En excluant les "lobes latéraux" du spectre (faible amplitude de ces composantes spectrales), ainsi que la partie négative du spectre (pas de sens physique), la largeur spectrale "significative" est donc : $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$.

Conséquence :

$$\tau \cdot \Delta\omega \sim 2\pi \quad \text{Relation temps-fréquence} \quad (\text{I.16})$$

⇒ plus le signal est bref et plus son spectre est large et inversement (→ illustration graphique "en live" !)

III Effets des filtres linéaires sur les signaux périodiques

III.1 Cas d'un signal sinusoïdal pur : fonction de transfert complexe (harmonique) en sortie ouverte (FTSO) - caractérisation des filtres

a - Expression

Les cours d'électrocinétique de première année ont permis de dégager une modélisation linéaire du comportement des circuits électriques courants, comportant résistances, bobines, et capacités.

Les grandeurs observables courants et tensions étaient alors régies par des équations différentielles linéaires, et dans l'étude des filtres, le circuit étudié est un quadripôle comportant grandeurs d'entrée indicées «e» et grandeurs de sortie indicées «s».

Les grandeurs d'intérêt sont en général les tensions d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, avec la sortie en boucle ouverte, c'est à dire avec $i_s(t) = 0$.

L'équation différentielle régissant les variations de telles grandeurs s'écrit, sous sa forme la plus générale :

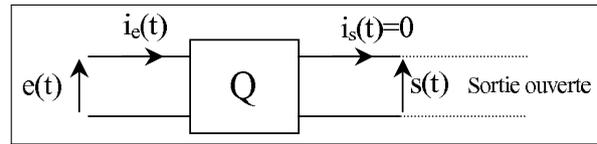


FIGURE I.15 – Schéma d'un quadripôle type filtre en boucle ouverte

$$D_0 s(t) + D_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + D_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = N_0 e(t) + N_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + N_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad (I.17)$$

avec D_0, D_1, \dots, D_n et N_0, N_1, \dots, N_m coefficients constants.

La réponse du système linéaire est :

$$s(t) = \underbrace{s_H(t)}_{\text{solution ESSM}} + \underbrace{s_P(t)}_{\text{solution particulière}}$$

Hypothèses :

- On suppose une excitation $e(t)$ sinusoïdale
- On suppose le système stable i.e. $s_H(t)$ évanescent. (Notion hors programme)

⇒ On étudie la réponse au régime sinusoïdal forcé (RSF) :

- entrée : $e(t) = E \times \cos(\omega t) \rightarrow \underline{e} = E \times e^{j\omega t}$
- sortie : $s(t) = S(\omega) \times \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \underline{s}(t) = S(\omega) \times e^{j(\omega t + \phi)}$

L'équation différentielle ci-dessus devient alors en formalisme complexe i.e. en espace des pulsations pour lesquelles $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$:

$$[D_0 + (j\omega)D_1 + \dots + (j\omega)^n D_n] \times \underline{s} = [N_0 + (j\omega)N_1 + \dots + (j\omega)^m N_m] \times \underline{e} \quad (I.18)$$

DÉFINITION - (III.1) - 4:

On appelle fonction de transfert complexe, le rapport $H(j\omega)$ défini par :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{N_0 + (j\omega)N_1 + (j\omega)^2 N_2 + \dots + (j\omega)^m N_m}{D_0 + (j\omega)D_1 + (j\omega)^2 D_2 + \dots + (j\omega)^n D_n} \quad (I.19)$$

REMARQUE - (III.1) - 5:

- L'établissement de la fonction de transfert permet de retrouver facilement l'équation différentielle régissant le système et ce plus facilement que par l'emploi direct des lois électrocinétiques habituelles, en particulier pour les systèmes d'ordre > 2 .

- $$\underbrace{j\omega}_{\text{domaine fréquentiel}} \leftrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{domaine temporel}}$$

b - Principales relations utiles : rappels

■ RELATION DU DIVISEUR DE TENSION

Principe : On recherche la tension complexe \underline{V}_B aux bornes du dipôle d'impédance Z_2 .

$$\underline{V}_B = Z_2 \cdot i = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{V}_A$$

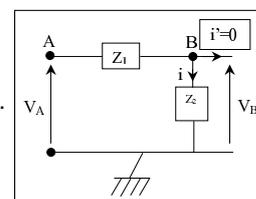


FIGURE I.16 – Diviseur de tension

Exemple d'exploitation : Filtre de Wien
à faire en "live" !!!

■ THÉORÈME DE MILLMAN

On considère le réseau linéaire ci-contre pour lequel on recherche l'expression du potentiel V_M en fonction des potentiels $[V_1, V_2, \dots, V_N]$ et des courants $[i'_1, i'_2, \dots, i'_P]$.

La loi des noeuds permet d'écrire en M :

$$\sum_{j=1}^N i_j + \sum_{k=1}^P i'_k = 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{j=1}^N \frac{V_j - V_M}{Z_j} + \sum_{k=1}^P i'_k = 0$$

soit :

$$V_M \sum_{j=1}^N \frac{1}{Z_j} = \sum_{j=1}^N \frac{V_j}{Z_j} + \sum_{k=1}^P i'_k$$

et enfin le théorème de Millman généralisé :

$$V_M = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{V_j}{Z_j} + \sum_{k=1}^P i'_k}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{Z_j}}$$

EXEMPLE D'EXPLOITATION : toujours Wien !

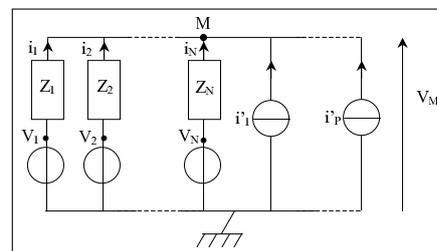


FIGURE I.17 – Théorème de Millman

c - Réponse en gain - réponse en phase d'un filtre : diagramme de Bode

Par définition, la fonction de transfert est le rapport complexe :

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{S(\omega) \cdot e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{E \cdot e^{j\omega t}} = \frac{S(\omega)}{E} \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

soit :

$$H(j\omega) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{=G(\omega)} \cdot e^{j\varphi(\omega)} = G(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$=G(\omega) = \frac{S(\omega)}{E}$$

Ainsi, on pose : $\begin{cases} G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{S(\omega)}{E} \text{ le gain} \\ \varphi(\omega) = \arg[H(j\omega)] \text{ la phase} \end{cases}$

On caractérise enfin le système en donnant le diagramme de Bode qui réunit les courbes de réponse en gain (en dB) et en phase (en rad) avec :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20 \log_{10} G(\omega) = fct(\log_{10} \omega) \\ \varphi = fct(\log_{10} \omega) \end{cases}$$

d - Bande passante

DÉFINITION - (III.1) - 5:

La bande passante d'un filtre est, par définition, le domaine de fréquence pour lequel le gain de ce dernier vérifie la relation suivante :

$$G(\omega) \geq \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \implies G_{dB}(\omega) \geq G_{dBmax} - \underbrace{20 \log \sqrt{2}}_{\simeq 3dB}$$

III.2 Cas d'un signal périodique quelconque : de l'utilité de la linéarité

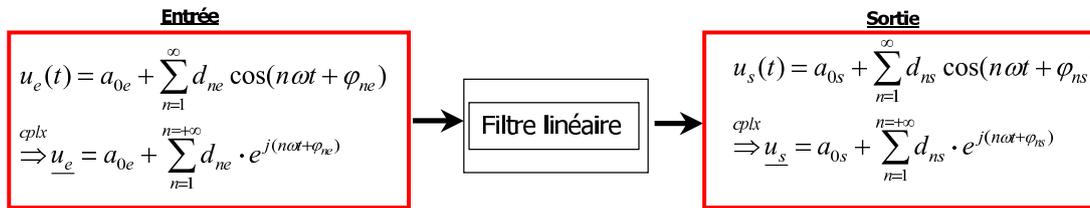
a - Action d'un système linéaire sur un signal périodique

Les filtres étudiés sont constitués d'un assemblage de composants discrets ayant tous un comportement linéaire (i.e. lien linéaire entre les grandeurs électriques (i, u) au sein de ces dipôles).

CONSÉQUENCES :

- L'équation différentielle régissant le lien entre grandeur d'entrée et de sortie d'un tel filtre est donc elle-même linéaire.

- la réponse d'un système linéaire à toute combinaison linéaire de signaux harmoniques (S.F.) est la combinaison linéaire des réponses du système à chacun des harmoniques du signal d'entrée. Cette propriété est résumée dans le synoptique ci-dessous :



avec :

$$\begin{cases} \text{Composante continue } (\omega = 0) : \mathbf{a}_{0s} = |\mathbf{H}(0)| \cdot \mathbf{a}_{0e} = \mathbf{G}(0) \cdot \mathbf{a}_{0e} \\ \text{Fondamental et harmoniques } (\omega \neq 0) : \mathbf{d}_{ns} = |\mathbf{H}(jn\omega)| \cdot \mathbf{d}_{ne} = \mathbf{G}(n\omega) \cdot \mathbf{d}_{ne} \\ \varphi_{ns} = \varphi_{ne} + \arg[\mathbf{H}(jn\omega)] \end{cases}$$

REMARQUE - (III.2) - 6:

ATTENTION : il est totalement faux d'écrire dans le cas d'un signal périodique :

$$|u_s| \equiv |G(\omega)| \cdot |u_e|$$

CONSÉQUENCE À RETENIR :

PROPRIÉTÉ - (III.2) - 6:

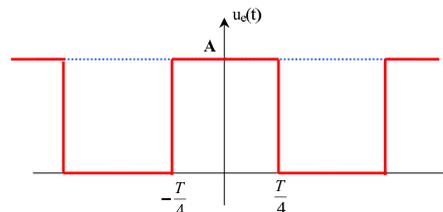
Le spectre du signal de sortie d'un dispositif linéaire comporte au plus le même nombre d'harmoniques à la même fréquence que celui du signal d'entrée.

ILLUSTRATION : en live!!!

b - Filtrage de composantes

i) Passe-bas

Objectif "classique" : ne garder que la composante continue d'un signal.



Considérons un signal créneau pair de fréquence T de valeur moyenne $\frac{A}{2}$ représenté ci-contre, de décomposition spectrale suivante :

$$u_e(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \cos[(2k+1)\omega t]$$

attaquant l'entrée d'un filtre passe-bas.

Le filtre est passif type RC de fonction de transfert :

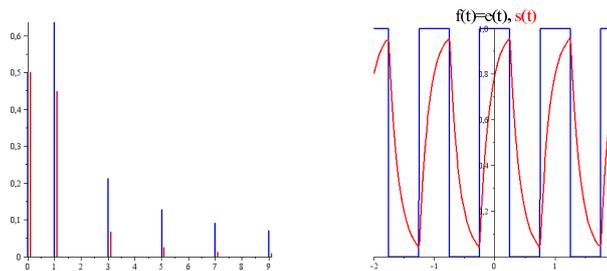
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \implies H(jx) = \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = \omega/\omega_c \\ \omega_c = \frac{1}{RC} \end{cases}$$

On cherche à isoler la composante continue $a_0 = \frac{A}{2}$ du signal.

- Choisissons dans un premier temps une pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{2\pi}{T} = \omega$, soit :

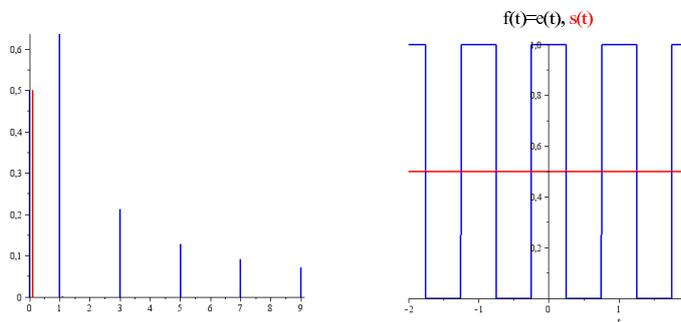
$$x = RC\omega = 1$$

Le résultat du filtrage est simulé numériquement ci-dessous. On constate un taux d'ondulation encore trop fort. L'analyse spectrale révèle néanmoins que le seul terme résiduel significatif est le fondamental.



- Choisissons maintenant une pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1000} \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{1000}$, soit :

$$x = RC\omega = 1000$$



Le résultat est naturellement plus satisfaisant, avec un taux d'ondulation résiduel à peine perceptible.

ii) Passe-haut

Objectif "classique" : supprimer la composante continue d'un signal tout en préservant une fidélité maximale de restitution du fondamental et des harmoniques.

Reprenons le signal créneaux pair (comportant un "offset" a_0), représenté plus haut.

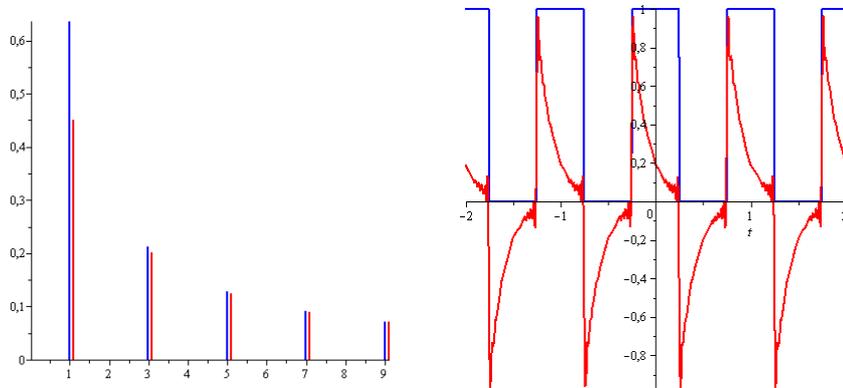
En prenant le cas d'un filtre passif RC du premier ordre de fonction de transfert : $H(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$

- On choisit dans un premier temps une pulsation de coupure de :

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

soit :

$$x = RC\omega = 1$$



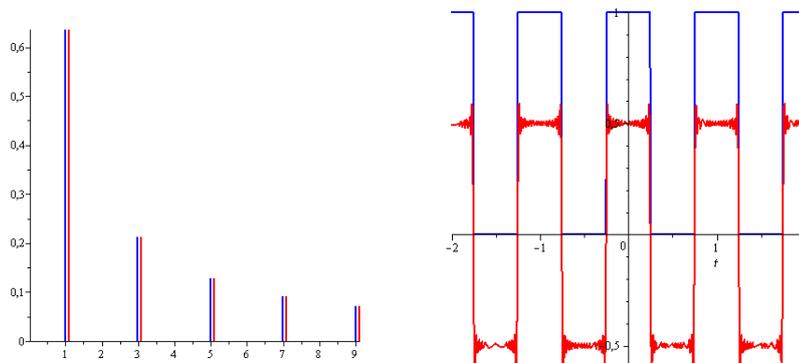
OBSERVATIONS :

Le fondamental est fortement altéré. Un tel filtrage est donc inacceptable.

- En prenant cette fois :

$$\omega_c = \frac{1}{1000} \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{1000} \omega$$

le résultat est le suivant :



OBSERVATIONS :

La partie variable du signal est maintenant correctement transmise ; le filtrage est donc satisfaisant.

iii) Passe-bande

Objectif "classique" : ne garder qu'une composante sinusoïdale du signal, par exemple le fondamental.

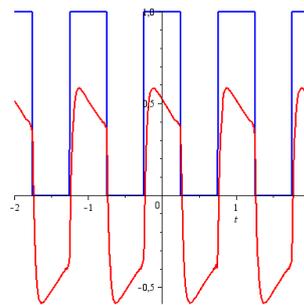
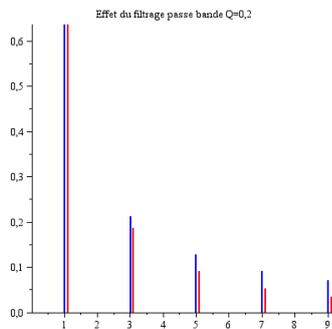
On filtre par exemple le signal créneau pair avec un RLC passe-bande passif de fonction de transfert :

$$H(jx) = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = \frac{1}{2m_1} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ x = \frac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$$

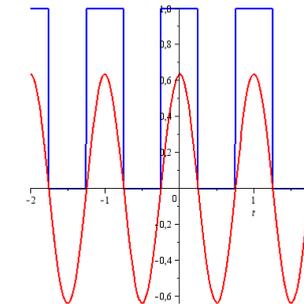
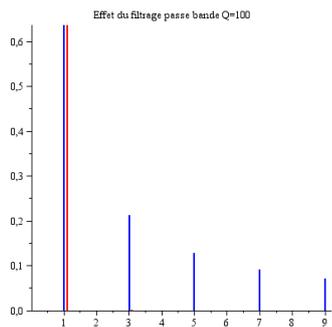
ATTENTION(!!!) : on doit "centrer" le filtre sur la pulsation du signal avec $\omega_0 = \omega$.

Observons le résultat en fonction de la valeur du facteur de qualité :

- $Q = 0,2$:



- $Q = 100$:



Conclusion : l'isolement complet du fondamental (ou d'une harmonique) nécessite une forte acuité du filtre.

c - Rôle des harmoniques de haut rang

On considère un signal $e(t)$ carré de front montant pour $t = 0^+$ avec composante continue que l'on applique à l'entrée de deux systèmes respectivement passe-bas puis passe-haut ; observons dans ces deux cas le signal de sortie $s(t)$ sur les simulations numériques suivantes :

• FILTRE PASSE-BAS

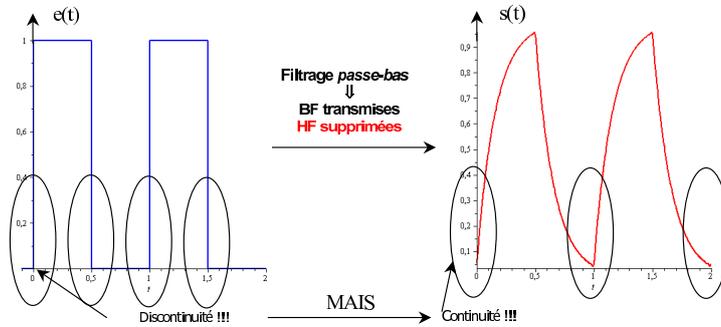


FIGURE I.18 – La suppression des HF ne permet pas de restituer les variations rapides du signal

• FILTRE PASSE-HAUT

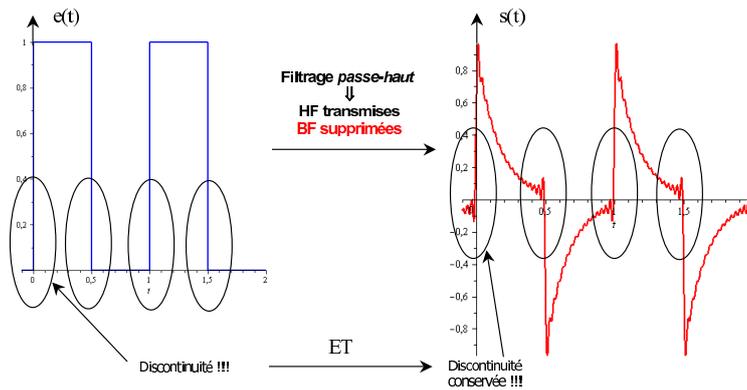


FIGURE I.19 – La conservation des HF assure la conservation des variations rapides du signal

Les discontinuités, et par extension les variations temporelles rapides présentes dans le signal d'entrée, sont éliminées une fois ce dernier traité par un filtrage passe-bas et conservées par un filtrage passe-haut \implies les harmoniques de haut rang contribuent donc aux variations temporelles rapides d'un signal.

III.3 Caractère intégrateur des filtres

a - Conditions d'intégration

Supposons un signal d'entrée de forme sinusoïdale :

$$e(t) = E \cdot \cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\text{cplx}} \underline{e}(t) = E \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Sa primitive complexe s'écrit :

$$\underline{s}(t) = \int \underline{e}(t) \cdot dt = \frac{E}{j\omega} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\frac{E}{\omega}}_{\rightarrow G \sim \frac{1}{\omega}} \cdot e^{j(\omega t + \varphi - \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{déphasage requis}})}$$

soit en notation réelle :

$$s(t) = \int e(t) \cdot dt = \frac{E}{\omega} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Conclusion :

Les deux conditions pour qu'un filtre présente un caractère intégrateur pour une composante de pulsation ω sont donc :

- ◇ un signal de sortie déphasé de $-\frac{\pi}{2}$ par rapport au signal d'entrée et ce quelque soit la pulsation ω .
- ◇ un signal de sortie d'amplitude divisée par ω par rapport au signal d'entrée de pulsation ω , soit une pente de -20 dB/décade dans la courbe de réponse en gain pour la fréquence considérée.

CONSÉQUENCE POUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE : chaque composante doit être intégrée donc : si le signal périodique possède un développement en SF :

$$e(t) = \sum_n d_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

alors le signal de sortie doit s'écrire

$$s(t) = \int e(t) \cdot dt = \sum_n \frac{d_n}{n\omega} \cos(n\omega t + \varphi_n - \frac{\pi}{2})$$

ainsi on doit assurer en sortie du filtre **pour toutes les composantes du signal** $e(t)$:

- ┌ un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$
- └ une amplitude divisée par la pulsation pour chaque harmonique soit pour le rang $n \times \frac{1}{n\omega}$

b - Filtres intégrateurs

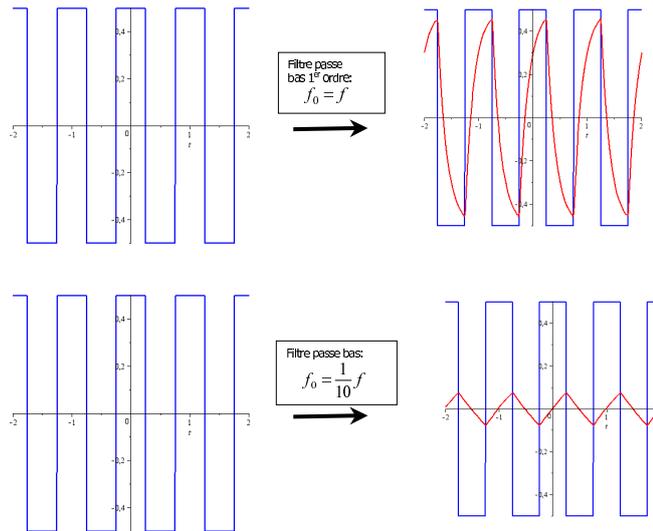
Exercice de cours: (III.3) - n° 4 *Quels sont les filtres présentant les conditions requises pour réaliser une opération d'intégration. Confirmer vos résultats à l'aide de la fonction de transfert correspondante.*

(RÉSULTAT : PB1 et PBde2)

Exemple avec un passe-bas passif du premier ordre

Cherchons par exemple à intégrer un signal créneau pair de pulsation ω :

- ◇ $\omega_c = \omega$
- ⇒ non satisfaisant.



◇ $\omega_c = \frac{\omega}{10}$
 \implies satisfaisant.

c - Exemple : recherche des conditions d'intégration

On considère le circuit RC ci-contre :

- 1 Montrer que la fonction de transfert d'un tel filtre s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

avec : $\omega_2 = \frac{1}{RC'}$ et $\omega_1 = \frac{1}{R(C + C')}$

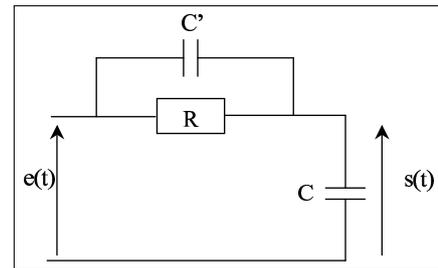


FIGURE I.20 – Filtre RC passe-bas)

En choisissant $C \gg C'$ on a $\omega_1 \ll \omega_2$

- 2 Montrer que le caractère intégrateur est obtenu pour les pulsations comprises dans l'intervalle :

$$\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$$

NB : les harmoniques d'ordre trop élevé ne sont pas dans l'intervalle d'intégration.

III.4 Caractère dérivateur des filtres

a - Conditions de dérivation

On reprend ici un signal d'entrée de forme sinusoïdale :

$$e(t) = E \cdot \cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\text{cplx}} \underline{e}(t) = E \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Sa dérivée complexe s'écrit :

$$\underline{s}(t) = \frac{d}{dt} \underline{e}(t) = j\omega \cdot E \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\omega \cdot E}_{\rightarrow G \sim \omega} \cdot e^{j(\omega t + \varphi + \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{déphasage requis}})}$$

qui donne en notation réelle :

$$s(t) = \omega \cdot E \cdot \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Conclusion :

Les deux conditions pour qu'un filtre présente un caractère dérivateur sont donc :

- ◇ un signal de sortie déphasé de $+\frac{\pi}{2}$ par rapport au signal d'entrée et ce quelque soit la pulsation ω .
- ◇ un signal de sortie d'amplitude multipliée par ω par rapport au signal d'entrée de pulsation ω , soit une pente de $+20 \text{ dB/décade}$ dans la courbe de réponse en gain pour la fréquence considérée.

CONSÉQUENCE POUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE : de la même manière, chaque composante doit être dérivée donc :

$$e(t) = \sum_n d_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \text{ donc : } s(t) = \frac{d}{dt} e(t) \cdot dt = \sum_n n\omega \cdot d_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \frac{\pi}{2})$$

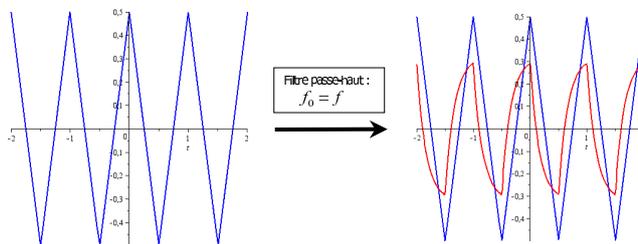
b - Filtres dérivateurs

Exercice de cours: (III.4) - n° 5 *Quels sont les filtres présentant les conditions requises pour réaliser une opération de dérivation. Confirmer vos résultats à l'aide de la fonction de transfert correspondante.*

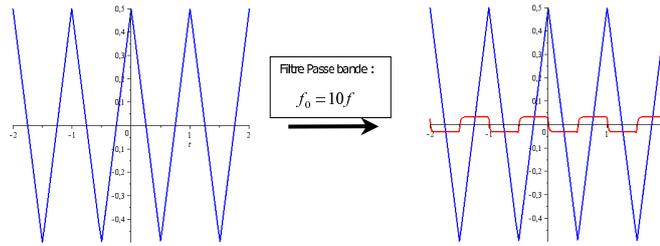
Exemple avec un passe-haut passif du premier ordre.

Cherchons par exemple à dériver un signal triangle pair de pulsation ω :

◇ $\omega_c = \omega$



⇒ non satisfaisant.



- ◇ $\omega_c = 10\omega$
 \implies satisfaisant.

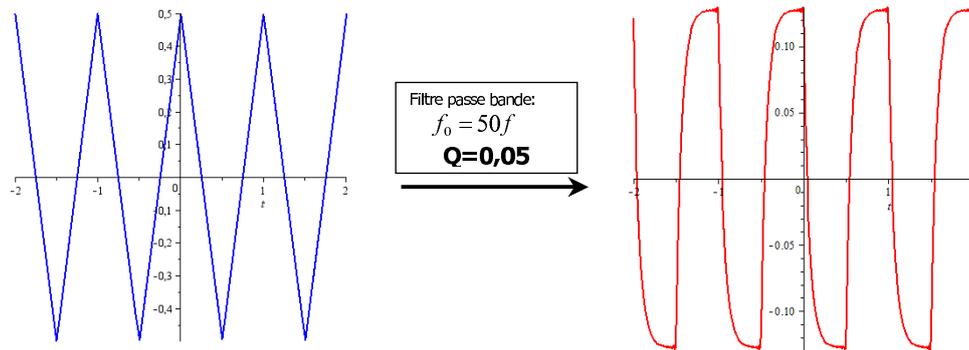
c - Cas particulier du filtre passe-bande : problème de l'acuité du filtre

Considérons un filtre passe-bande passif RLC dont on rappelle l'expression de la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

En attaquant l'entrée de ce filtre par un signal triangle $e(t)$ de pulsation $\omega \ll \omega_0$, on s'attend à observer en sortie un signal $s(t)$ correspondant à la dérivée de $e(t)$. Envisageons néanmoins deux cas de figure concernant la valeur du facteur de qualité :

- ◇ $Q = 0,05$, valeur très faible et donc filtre peu sélectif :



\implies la dérivée du signal $e(t)$ est assez satisfaisante.

- ◇ $Q = 100$, valeur très forte et donc filtre très sélectif :

\implies la dérivée du signal $e(t)$ est cette fois médiocre, avec de fortes "ondulations" du signal autour des discontinuités attendues dans un signal créneau.

Ceci est une conséquence de la trop forte amplification des harmoniques de haut rang qui, du fait du fort facteur de qualité Q , ne sont pas situées dans une zone de pente $+20 \text{ dB/decade}$ dans le diagramme de réponse en gain, mais dans le pic de résonance du filtre :

A retenir : dans le cas des filtres passe-bande, l'opération de dérivation est assurée moyennant la vérification d'un 3^{ième} critère :

$$Q \ll 1$$

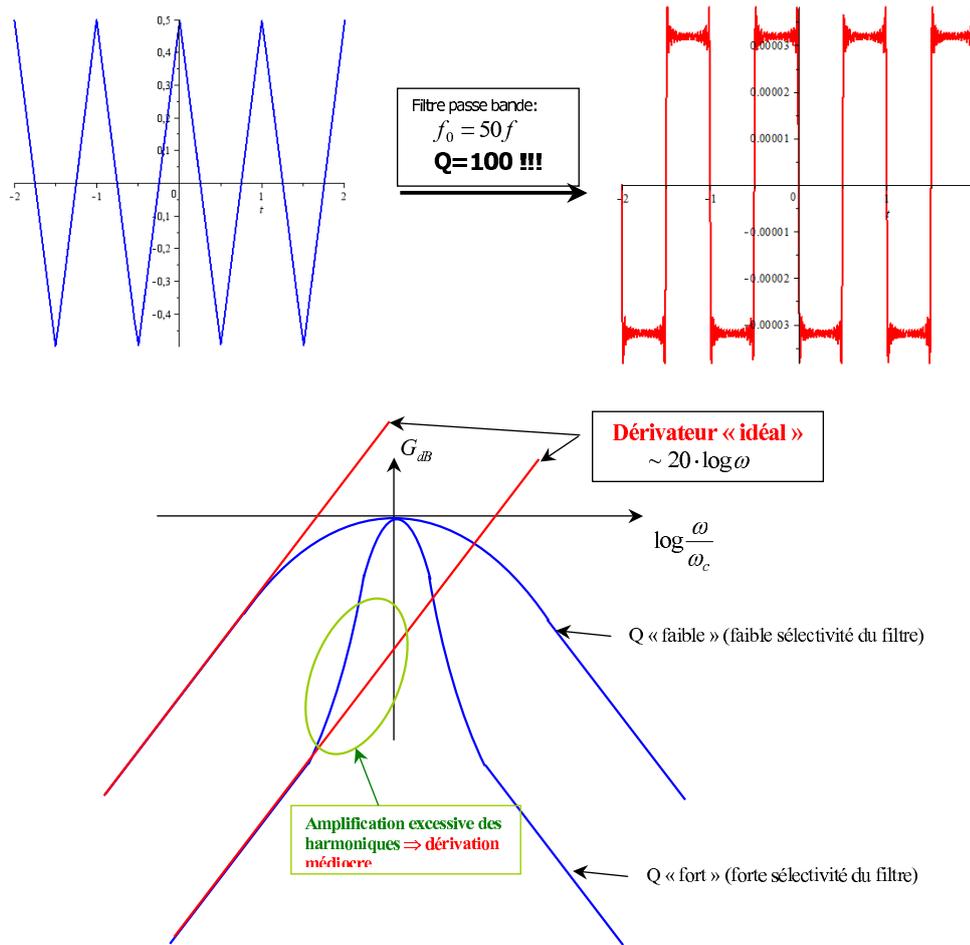
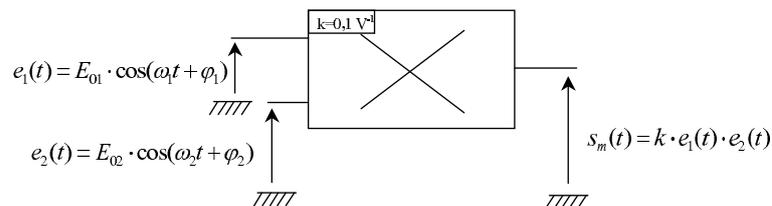


FIGURE I.21 – Problème de suramplification des harmoniques de rang élevé.

IV Petite approche des circuits non linéaires

IV.1 Un exemple classique : le multiplieur

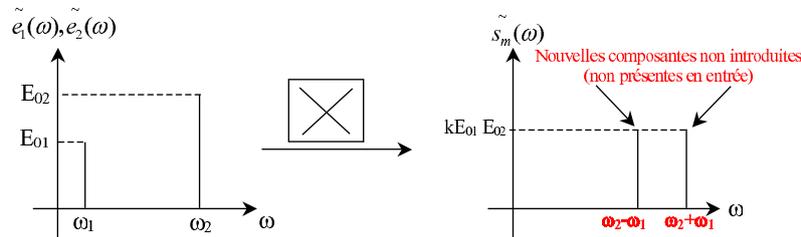


Le signal de sortie s'écrit :

$$s_m(t) = k \cdot e_1(t) \times e_2(t) = kE_{01}E_{02} \cdot \cos(\omega_1t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_2t + \varphi_2)$$

soit :

$$s_m(t) = k \frac{E_{01} E_{02}}{2} \left[\cos \left(\underbrace{(\omega_2 - \omega_1)}_{\text{nvlle fréquence introduite}} t + (\varphi_2 - \varphi_1) \right) + \cos \left(\underbrace{(\omega_2 + \omega_1)}_{\text{nvlle fréquence introduite}} t + (\varphi_2 + \varphi_1) \right) \right]$$



CONCLUSION : deux nouvelles fréquences non présentes dans le spectre du signal d'entrée sont introduites dans le signal de sortie du circuit \Rightarrow **circuit non linéaire**

IV.2 Exemples d'applications :

- ◇ MODULATEUR D'AMPLITUDE : La transmission d'un signal par voie hertzienne nécessite d'amener celui-ci en haute fréquence. On peut réaliser ceci par **modulation d'amplitude** à l'aide d'un circuit multiplicateur.

Exemple :

$$\begin{cases} e_1(t) \text{ à transmettre (BF)} : f_1 = f_e = 100 \text{ Hz} \\ e_2(t) \text{ porteuse (HF)} : f_2 = f_p = 10 \text{ kHz} \end{cases} \implies \text{2 fréquences HF en sortie : } \begin{cases} f_2 - f_1 = 9,9 \text{ kHz} \\ f_2 + f_1 = 10,1 \text{ kHz} \end{cases}$$

- ◇ EXTRACTEUR DE VALEUR EFFICACE :

Exercice de cours: (IV.2) - n° 6 On souhaite pouvoir mesurer la valeur efficace d'un signal $e(t)$. Proposer un montage sachant que l'on dispose d'un composant multiplicateur et d'un composant extracteur de racine carré.

- ◇ DÉMODULATION PAR DÉTECTION SYNCHRONE : en TP!!!